

ЧУРАШЕВА Надежда Георгиевна

**ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ТЕПЛОПЕРЕНОСОМ.  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ**

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Казань-2013

Работа выполнена на кафедре  
«Прикладная математика и фундаментальная информатика»  
ФГБОУ ВПО «Омский государственный технический университет»

- Научный руководитель:** Романовский Рэм Константинович,  
доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Омский государственный технический университет»
- Официальные оппоненты:** Логинов Борис Владимирович,  
доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный технический университет»
- Чугунов Владимир Аркадьевич,  
доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Казанский федеральный университет»
- Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук», г. Новосибирск

Защита состоится 3 октября 2013 г. в 14 ч 30 мин на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, НБ КФУ).

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
к. ф.-м. н., доцент

Е. К. Липачёв

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** В последние десятилетия интенсивно развивается возникшая на стыке теории дифференциальных уравнений и теории управления проблематика, связанная с разработкой и анализом математических моделей управления волновыми процессами, описываемыми краевыми задачами для гиперболических уравнений.

Интенсивное развитие этой проблематики началось в связи с потребностями практики в 1970–90-е гг. в работах Ж.-Л. Лионса, О. Ю. Эмануилова, Ф. П. Васильева, А. И. Егорова, М. М. Потапова. В последние годы продолжают интенсивные исследования по математическим моделям граничного управления волновыми процессами.

Большой цикл В. А. Ильина, Е. И. Моисеева и их учеников посвящен граничному управлению колебаниями струн и стержней.

Одна из актуальных задач теории управления – разработка методов граничного управления процессом теплопереноса в сплошных средах. В последние годы интенсивно развивается гиперболическая (волновая) теория теплопроводности, устраняющая имеющий место в классической теории парадокс бесконечной скорости распространения тепла и описывающая *быстропротекающие* процессы теплопереноса. Цикл работ О. Г. Жуковой и Р. К. Романовского посвящен разработке математических моделей граничного управления теплопереносам в рамках этой теории. Рассматриваются краевые задачи для гиперболической системы уравнений теплопроводности, моделирующие теплоперенос в однородном *изотропном* материале. Ставится задача поиска температурного режима на границе тела, обеспечивающего заданное распределение температуры тела в заданный момент времени. Построены зависящие от функциональных параметров классы граничных управлений.

Представляет теоретический и практический интерес продолжение этих исследований по двум направлениям.

**I.** Перенос указанных результатов по граничному управлению теплопереносом в двумерном и трехмерном материале на случай *анизотропного* материала.

**II.** Решение – в случаях одномерного, двумерного и трехмерного материала – задачи выбора из построенных классов допустимых граничных управлений *оптимального*, минимизирующего заданный функционал потерь.

**Цель работы:** решение задач управления, указанных в пунктах I и II. Из сказанного выше следует актуальность темы диссертации.

**Научная новизна.** В диссертационной работе впервые получены следующие **основные результаты**.

1. Решена задача оптимального одностороннего граничного управления теплопереносом в стержне с квадратичным функционалом потерь.

2. Вычислены матрицы Римана первого и второго рода семейств гиперболических систем, ассоциированных с двумерной и трехмерной гиперболической системой уравнений теплопроводности в общем случае анизотропного материала.

3. Построены зависящие от функциональных параметров классы граничных управлений теплопереносом в анизотропной пластинке и в анизотропном пространственном теле звездной формы.

4. Решена в каждом из этих случаев задача выбора оптимального граничного управления с квадратичным функционалом потерь. В качестве следствия получены решения задачи оптимального граничного управления теплопереносом в изотропном двумерном и трехмерном материале.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты вносят существенный вклад в теорию оптимального граничного управления процессами в сплошных средах. Они могут использоваться специалистами по теплофизике и теплоэнергетике при решении конкретных задач управления процессом теплопереноса, а также при подготовке студентов вузов по этим специальностям.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на конференции «Прикладная математика и фундаментальная информатика» (два доклада, Омск, апрель 2011 г.), на IV Международной конференции МПМО-2011 «Математика, ее приложения и математическое образование» (Улан-Удэ, июнь 2011 г.), на X международной Четаевской конференции (Казань, июнь 2012 г.), на конференции «Прикладная математика и фундаментальная информатика» (Омск, апрель 2012 г.), на VII Международной научно-технической конференции «Динамика систем, механизмов, машин» (два доклада, Омск, ноябрь 2012 г.).

**Публикации автора.** Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах, из них статьи [1–4] – в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК. Из совместных работ в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 84 наименований, включая работы автора. В каждой главе использована своя нумерация параграфов, рисунков, формул и теорем. Объем диссертации – 97 страниц.

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю Р. К. Романовскому за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор литературы и дается краткая аннотация результатов работы.

**1. Глава 1** носит подготовительный характер. Здесь вводятся основные понятия и теоремы, на которые опирается дальнейшее изложение.

В § 1.1 приведена схема обобщенного метода Лагранжа.

В § 1.2 изложены систематически используемые в работе сведения о матрицах Римана первого и второго рода одномерной гиперболической системы.

В § 1.3 приведена гиперболическая модель теплопроводности для случая анизотропного материала.

§ 1.4 содержит используемые в главе 2 сведения о матрицах Римана одномерной гиперболической системы теплопроводности.

Приведенная в § 1.3 гиперболическая система уравнений теплопроводности имеет вид

$$\begin{cases} c \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} q = 0, \\ \tau \frac{\partial q}{\partial t} + K \operatorname{grad} T + q = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь первое уравнение – закон сохранения энергии, второе – обобщенный закон Фурье (релаксационное соотношение первого порядка),  $T(x, t)$ ,  $q(x, t)$  – температура и вектор плотности теплового потока в точке  $x$  в момент времени  $t$ ,  $c$ ,  $\rho$  – удельная теплоемкость и плотность,  $\tau$  – период релаксации,  $K$  – тензор теплопроводности – симметрическая положительно определенная матрица второго или третьего порядка:

$$K = K^T, \quad K > 0.$$

В рамках модели (1) скорость распространения теплового импульса по направлению любого орта  $\omega$  в  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$  конечна и дается формулой

$$a_\omega = \sqrt{\frac{\omega^T K \omega}{\tau c \rho}}. \quad (2)$$

**2. В главах 2–3** рассматриваются поставленные выше задачи управления теплопереносом соответственно в стержне, анизотропной пластинке звездной формы, анизотропном пространственном теле звездной формы. Теплоперенос моделируется смешанной задачей для системы (1) соответ-

ствующей размерности (в случае стержня  $K = \kappa > 0$  – скаляр). Строится в каждом случае с использованием аппарата матриц Римана класс допустимых граничных условий – обеспечивающих заданное распределение температуры тела в заданный момент времени, – затем из этого класса выбирается методом Лагранжа оптимальное граничное управление – минимизирующее заданный квадратичный функционал потерь. Подход состоит в сведении задачи граничного управления решениями смешанной задачи к задаче стартового управления решениями вспомогательной задачи Коши для системы (1). При этом процедура построения класса допустимых управлений в двумерном и трехмерном случаях *существенно отличается* от примененной в указанных выше работах О. Г. Жуковой.

**3. В главе 2** рассматривается задача одностороннего граничного управления теплопереносом в конечном стержне длины  $l$ . Смешанная задача, моделирующая теплоперенос, имеет в векторно-матричной записи вид

$$Lu = \left( \frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial s} + B \right) u = 0, \quad (s, t) \in [0, l] \times [0, \infty), \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T|_{s=0} = \mu(t), \quad T|_{s=l} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$u = \begin{bmatrix} T \\ q \end{bmatrix}, \quad A = Z \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} Z^{-1}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b^{-1} & -b^{-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau^{-1} \end{bmatrix},$$

$$a = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau c \rho}} - \text{величина (2) для стержня}, \quad b = \sqrt{\frac{\tau}{\kappa c \rho}},$$

$\mu$  – кусочно-гладкая, выполняется условие согласования  $\mu(0) = 0$ . Начальные данные выбраны нулевыми без потери общности для упрощения выполняемых вычислений. Задача (3)–(4) однозначно разрешима в классе кусочно-гладких функций со слабыми разрывами (скачками производных) на характеристиках, проходящих через точки  $(0, 0)$ ,  $(0, l)$  и точки разрыва  $\mu'$ .

Решение задачи оптимального граничного управления приводится в §§ 2.2, 2.3 и состоит из двух этапов.

**3.1.** При фиксированных  $t^* > 0$ ,  $\theta(s) \in C^1[0, l]$ ,  $\theta(l) = 0$  ищется температурный режим  $\mu$  на левом конце стержня, обеспечивающий выполнение равенства

$$T(s, t^*; \mu_0) = \theta(s), \quad s \in [0, l]. \quad (5)$$

Предполагается, что за время  $t^*$  движущийся с конца стержня со скоростью  $a$  тепловой импульс успевает пройти весь стержень. Рассматривается крайний случай

$$t^* = \frac{l}{a}. \quad (6)$$

Зафиксируем вектор-функцию

$$h(s) = \begin{bmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{bmatrix} \in C^1[0, l]. \quad (7)$$

Определим операторы  $\mathcal{A}_k$ ,  $\Lambda_k$ ,  $k = 1, 2$ , равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k h_k &= \alpha_k \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) h_k(l - at) + \int_{l-at}^l v_{1k}(l - \sigma, t) h_k(\sigma) d\sigma, \quad k = 1, 2, \\ \Lambda_k h_k &= \beta_k h_k(s) + \int_s^l v_{1k}(s + l - \sigma, t^*) h_k(\sigma) d\sigma, \quad \beta_k = \alpha_k \exp\left(-\frac{t^*}{2\tau}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\alpha_1 = 1/2$ ,  $\alpha_2 = b/2$ ,  $v_{1k}$  – элементы матрицы Римана второго рода системы (3):

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \end{bmatrix} = \frac{\exp(-t/(2\tau))}{4a\tau} \begin{bmatrix} \frac{t}{d} I_1\left(\frac{d}{2\tau}\right) + I_0\left(\frac{d}{2\tau}\right) & \frac{bs}{ad} I_1\left(\frac{d}{2\tau}\right) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где  $d = \sqrt{t^2 - (s/a)^2}$ ,  $I_j(z)$  – функции Бесселя мнимого аргумента.

Будем называть векторы (7) *управлениями*. Обозначим  $H$  класс управлений, удовлетворяющих условию

$$\Lambda h = \Lambda_1 h_1 + \Lambda_2 h_2 = \theta(s), \quad s \in [0, l], \quad (10)$$

где  $\theta(s)$  – функция (5). Фиксируя в (10) произвольную компоненту  $h_k$  вектора (7), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода на другую компоненту, однозначно разрешимое в  $C^1[0, l]$ .

**ТЕОРЕМА 2.1.** *Каждому вектору  $h \in H$  отвечает решение  $\mu$  задачи граничного управления (5), (6), вычисляемое по формуле*

$$\mu(t, h) = \mathcal{A}_1 h_1 + \mathcal{A}_2 h_2, \quad (11)$$

где  $\mathcal{A}_k h_k$  – функции (8).

**3.2.** Слагаемое (8) в правой части (11) указывает вклад компоненты  $h_k$  вектора (7) в формирование требуемого температурного режима  $\mu$  на ле-

вом конце стержня. В качестве функционала потерь принимается «сумма квадратов»

$$F(h) = a \int_0^{t^*} [(\mathcal{A}_1 h_1)^2 + (\mathcal{A}_2 h_2)^2] dt \rightarrow \min; \quad h \in H.$$

$F$  имеет смысл, с точностью до постоянного множителя, квадрата внутренней энергии, внесенной управлением на левом конце стержня за время  $t^*$ . Минимизация  $F$  эквивалентна минимизации  $\sqrt{F}$ .

Замена  $s = l - at$  приводит  $F$  к виду

$$F(h) = \int_0^l [(\hat{\mathcal{A}}_1 h_1)^2 + (\hat{\mathcal{A}}_2 h_2)^2] ds, \quad (12)$$

где

$$\hat{\mathcal{A}}_k h_k = \alpha_k e(s) h_k(s) + \int_s^l v_{1k} \left( l - \sigma, \frac{l-s}{a} \right) h_k(\sigma) d\sigma, \quad e(s) = \exp \left[ -\frac{l-s}{2a\tau} \right]. \quad (13)$$

Введем гильбертовы пространства

$$X = L_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2), \quad Y = L_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}).$$

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$F(h) \rightarrow \min, \quad \Lambda h - \theta = 0, \quad h \in X. \quad (14)$$

Функция Лагранжа задачи (14) имеет вид

$$\mathcal{L}(h, \lambda) = F(h) + \int_0^l \lambda(s)(\Lambda h - \theta) ds, \quad \lambda \in Y.$$

Верны утверждения

1°. Функция (12) выпукла, строго дифференцируема в каждой точке  $h \in X$  и имеет вторую производную Фреше  $F'' = \text{const}$ , при этом для любого  $f = [f_1, f_2]^T \in X$

$$F'(h)f = 2 \int_0^l [(\hat{\mathcal{A}}_1 h_1) \hat{\mathcal{A}}_1 f_1 + (\hat{\mathcal{A}}_2 h_2) \hat{\mathcal{A}}_2 f_2] ds,$$

$$(F''f)f = 2 \int_0^l [(\hat{\mathcal{A}}_1 f_1)^2 + (\hat{\mathcal{A}}_2 f_2)^2] ds,$$

$$(F''f)f \geq c \|f\|_X^2, \quad c = \text{const} > 0.$$



2°.  $\Lambda \in \text{Hom}(X \rightarrow Y)$ ,  $\Lambda X = Y$ .

Применение с учетом 1°, 2°, теоремы 1.1 из главы 1 (в силу выпуклости  $F$  здесь идет речь о глобальном экстремуме) приводит решение задачи (14) к решению системы уравнений

$$\mathcal{L}'_h(h, \lambda) = 0, \quad \Lambda h = \theta, \quad (h, \lambda) \in X \times Y,$$

равносильной, как показывают вычисления, системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$R\psi(s) + \int_0^l K(s, \sigma)\psi(\sigma)d\sigma = \eta(s), \quad (15)$$

где

$$R = \begin{bmatrix} 2\alpha_1^2 e^2(s) & 0 & \beta_1 \\ 0 & 2\alpha_2^2 e^2(s) & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix}, \quad K = [k_{ij}(s, \sigma)]_1^3,$$

$$k_{ii}(s, \sigma) = \begin{cases} 2[\alpha_i e(\sigma)v_i(\sigma, s) + \int_0^\sigma v_i(\tau, s)v_i(\tau, \sigma)d\tau], & 0 \leq \sigma < s, \\ 2[\alpha_i e(s)v_i(s, \sigma) + \int_0^s v_i(\tau, s)v_i(\tau, \sigma)d\tau], & s \leq \sigma \leq l, \end{cases}$$

$$k_{i3}(s, \sigma) = \begin{cases} \hat{v}_i(\sigma, s), & 0 \leq \sigma < s, \\ 0, & s \leq \sigma \leq l, \end{cases} \quad k_{3i}(s, \sigma) = k_{i3}(\sigma, s), \quad k_{12} = k_{21} = k_{33} = 0,$$

$$v_i(s, \sigma) = v_{li}(l - \sigma, (l - s)/a), \quad \hat{v}_i(s, \sigma) = v_{li}(s + l - \sigma, l/a), \quad i = 1, 2.$$

Нетрудно убедиться, что  $|\det R| \geq \text{const} > 0$ .

Из альтернативы Фредгольма с учетом «хороших свойств» ядра  $R^{-1}K$  и правой части  $R^{-1}\eta$  следует, что система (15) имеет единственное решение

$$\hat{\psi} = [\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{\lambda}]^T \in C^1[0, l],$$

если выполняется требование

$$-1 \notin s(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K}\psi = \int_0^l R^{-1}K\psi d\sigma, \quad (16)$$

где  $s(\mathcal{K})$  – множество собственных значений компактного оператора  $\mathcal{K}$ . Каждая точка  $\zeta \in s(\mathcal{K})$  отделена от остальных и непрерывно зависит от па-

раметров, входящих в формулы для  $R, K$ . Поэтому случай  $-1 \in s(\mathcal{K})$  имеет место «с вероятностью ноль». Будем говорить, что имеет место ситуация *общего положения* (16).

Подстановка  $\hat{h}_1, \hat{h}_2$  в равенство (11) со слагаемыми (13) дает оптимальное граничное условие на левом конце стержня.

**ТЕОРЕМА 2.2.** *Задача оптимального управления (14) имеет в общем положении (16) единственное решение  $\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ , где  $\hat{h}_k$  – компоненты решения  $\hat{\psi}$  системы интегральных уравнений (15). Соответствующий оптимальный температурный режим на левом конце стержня дается формулой*

$$\hat{\mu}(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \frac{\hat{h}_1(l-at) + b\hat{h}_2(l-at)}{2} + \sum_{k=1}^2 \int_{l-at}^l v_{1k}(l-\sigma, t) \hat{h}_k(\sigma) d\sigma,$$

где  $a = \sqrt{\kappa/\tau c \rho}$ ,  $b = \sqrt{\tau/\kappa c \rho}$ ,  $v_{1k}$  – функции (9).

**4. Глава 3** посвящена распространению результатов главы 2 на случаи двумерного и трехмерного материала. В §§ 3.1–3.4 решается задача оптимального граничного управления теплопереносом в анизотропной пластинке, в § 3.5 эти результаты переносятся на случай анизотропного пространственного тела. Случай изотропного материала ( $K = \kappa I$ ) оговаривается в конце главы.

В двумерном случае

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{bmatrix}, \quad \kappa_{12} = \kappa_{21}, \quad \kappa_{ii} > 0, \quad \det K > 0.$$

Система (1) в векторно-матричной записи имеет вид

$$Lu = \left( \frac{\partial}{\partial t} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + B \right) u = 0, \quad (17)$$

$$\text{где } u = \begin{bmatrix} T \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & (c\rho)^{-1} & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{11} & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (c\rho)^{-1} \\ \tau^{-1}\kappa_{12} & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть  $\mathcal{D}$  – ограниченная область на плоскости  $x = (x_1, x_2)$ , звездная относительно точки  $(0, 0)$ , с кусочно-гладкой границей с уравнением в полярных координатах

$$|x| = r(\varphi) > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Рассматривается смешанная задача, моделирующая теплоперенос в пластинке  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{cases} Lu = 0, & (x, t) \in \mathcal{D} \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = [0, 0, 0]^T, \quad T|_{|x|=r(\varphi)} = \mu(\varphi, t), \end{cases} \quad (18)$$

где  $L$  – оператор (17), функция  $\mu$  непрерывна в своей области определения, выполняются условия согласования  $\mu(\varphi, 0) = 0$ .

**4.1. Введем семейство ортов**

$$\Omega = \left\{ \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \right\}.$$

Построим семейство одномерных гиперболических систем

$$L_\omega u = \left( \frac{\partial}{\partial t} + A(\omega) \frac{\partial}{\partial s} + B \right) u = 0, \quad \omega \in \Omega, \quad (19)$$

где  $A(\omega) = \cos \alpha A_1 + \sin \alpha A_2$ ,  $A_k$ ,  $B$  – матрицы (17). Нетрудно получить:

$$A(\omega) = Z_\omega \text{diag}(a_\omega, 0, -a_\omega) Z_\omega^{-1}, \quad Z_\omega = \begin{bmatrix} a_\omega & 0 & a_\omega \\ \frac{K\omega}{\tau} & \hat{\omega} & -\frac{K\omega}{\tau} \end{bmatrix}, \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix},$$

где  $a_\omega$  – величина (2).

Проведем на плоскости  $(s, t)$  характеристики  $s = \pm a_\omega t$  оператора  $L_\omega$ , и пусть  $Y_{0\omega}^\pm$ ,  $Y_{1\omega}^\pm$  – открытые углы с вершиной в  $(0, 0)$ , изображенные на рис. 1. Вычисления по формулам § 1.3 дают следующий результат.

**ТЕОРЕМА 3.1.** Матрицы Римана первого и второго рода  $U_{k\omega}$ ,  $V_\omega$  семейства гиперболических систем (19) даются формулами

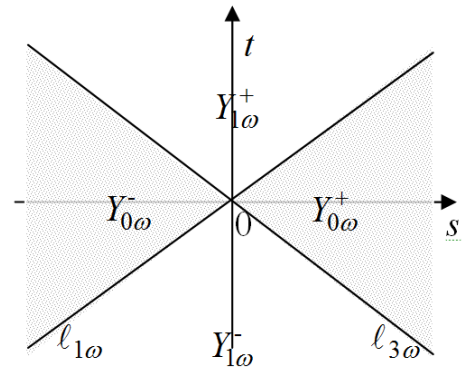


Рис. 1

$$\begin{aligned}
U_{1\omega}(t) &= \frac{b_\omega \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{2\tau a_\omega} \begin{bmatrix} \tau a_\omega b_\omega^{-1} & \tau a_\omega \omega^\top \\ b_\omega^{-1} K \omega & K \omega \omega^\top \end{bmatrix}, \quad U_{2\omega}(t) = \frac{b_\omega \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{2\tau a_\omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega} \cdot \nu_\omega^\top \\ 0 & \hat{\omega} \cdot \nu_\omega^\top \end{bmatrix}, \\
U_{3\omega}(t) &= \frac{b_\omega \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{2\tau a_\omega} \begin{bmatrix} \tau a_\omega b_\omega^{-1} & -\tau a_\omega \omega^\top \\ -b_\omega^{-1} K \omega & K \omega \omega^\top \end{bmatrix}, \quad \nu_\omega = \begin{bmatrix} -\kappa_{12} \omega_1 - \kappa_{22} \omega_2 \\ \kappa_{11} \omega_1 + \kappa_{12} \omega_2 \end{bmatrix}, \\
V_\omega(s, t) = [v_{ik\omega}] &= \begin{cases} Z_\omega \hat{V}_\omega Z_\omega^{-1}, & (s, t) \in Y_{1\omega}^+ \cup Y_{1\omega}^-, \\ 0, & (s, t) \in Y_{0\omega}^+ \cup Y_{0\omega}^-, \end{cases} \\
\hat{V}_\omega &= \frac{\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{4\tau a_\omega} \begin{bmatrix} \frac{d_\omega}{d_{1\omega}} I_1\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) & 0 & I_0\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ I_0\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) & 0 & \frac{d_\omega}{d_{2\omega}} I_1\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где  $b_\omega = \frac{1}{a_\omega c \rho}$ ,  $d_{1\omega} = t - s / a_\omega$ ,  $d_{2\omega} = t + s / a_\omega$ ,  $d_\omega = \sqrt{d_{1\omega} d_{2\omega}}$ . (20)

Из формул для матрицы  $V_\omega$  в частности, следует:

$$\begin{aligned}
v_{11\omega}(s, t) &= \delta_{1\omega}(s, t), \quad v_{12\omega}(s, t) = \omega_1 \delta_{2\omega}(s, t), \\
\delta_{1\omega}(s, t) &= \frac{\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{4a_\omega \tau} \left[ I_0\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) + \frac{t}{d_\omega} I_1\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) \right], \\
\delta_{2\omega}(s, t) &= \frac{s b_\omega \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{4a_\omega^2 \tau d_\omega} I_1\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right), \quad |s| < a_\omega |t|.
\end{aligned} \tag{21}$$

**4.2.** В двумерном случае задача граничного управления (5) имеет вид

$$T(x, t^*; \mu) = \theta(x), \quad x \in \bar{\mathcal{D}}, \tag{22}$$

где  $t^* \geq \frac{2r_0}{a_m}$ ,  $a_m = \min_{\omega \in \Omega} a_\omega$ ,  $r_0 = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} r(\varphi)$ ,

за это время тепловой импульс, движущийся с границы по любому направлению  $\omega$  со скоростью  $a_\omega$ , успевает пройти весь путь до ближайшей точки границы  $\partial \mathcal{D}$ . Предполагается  $\theta(x) \in \dot{C}^\infty(\bar{\mathcal{D}})$ ; здесь и далее символ  $\dot{C}^\infty$  обозначает множество функций из  $C^\infty(\bar{\mathcal{D}})$  с носителем строго внутри  $\mathcal{D}$ .

Продолжая  $\theta$  нулем из  $\bar{\mathcal{D}}$  в  $\mathbb{R}^2$  представляя продолженную функцию интегралом Фурье и переходя к полярным координатам, получим:

$$\theta(x) = \int_0^\pi \theta_\alpha(\omega \cdot x) d\alpha, \quad \theta_\alpha(s) = (2\pi)^{-2} \int_0^\infty (e^{irs} \hat{\theta}(r\omega) + e^{-irs} \hat{\theta}(-r\omega)) r dr, \quad (23)$$

где  $\hat{\theta}$  – преобразование Фурье функции  $\theta$ ,  $\omega \cdot x = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha$ .

Обозначим  $r_{1\omega} = a_\omega t^* - r_0$ ,  $r_{2\omega} = a_\omega t^* + r_0$ ,

$$\Pi = \{(s, \alpha, \varphi) : (\alpha, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi], r_{1\omega} \leq s \leq r_{2\omega}\}.$$

Зафиксируем вектор-функцию

$$h = \begin{bmatrix} h_1(s, \alpha, \varphi) \\ h_2(s, \alpha, \varphi) \end{bmatrix} \in C[\Pi], \quad h|_{\varphi=0} = h|_{\varphi=2\pi}. \quad (24)$$

Определим оператор  $\Lambda$  равенством

$$\Lambda h = \Lambda_1 h_1 + \Lambda_2 h_2, \quad \Lambda_k h_k = b_{k\omega} \exp\left(-\frac{t^*}{2\tau}\right) h_k(s, \alpha, \varphi) + \int_{r_{1\omega}}^s \delta_{k\omega}(s - a_\omega t^* - \sigma, t^*) h_k(\sigma, \alpha, \varphi) d\sigma, \quad (25)$$

где  $b_1 = 1/2$ ,  $b_2 = -b_\omega/2$ ,  $b_\omega$  – величина (20),  $\delta_{k\omega}$  вычисляются по формулам (21). Будем называть векторы (24) управлениями. Обозначим  $\mathcal{H}$  класс управлений  $h$ , удовлетворяющих требованию

$$\Lambda h = \theta_\alpha(s - a_\omega t^*), \quad (s, \alpha, \varphi) \in \Pi. \quad (26)$$

Вычисление класса  $\mathcal{H}$  сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода по  $s \in [r_{1\omega}, r_{2\omega}]$  на одну из компонент  $h_k$  вектора  $h$  при фиксированной другой.

**ТЕОРЕМА 3.2.** *Каждому вектору  $h \in \mathcal{H}$  отвечает решение  $\mu$  задачи граничного управления (22), вычисляемое по формуле*

$$\mu(\varphi, t; h) = \int_0^\pi [T_1(s_{\alpha\varphi}, \alpha, \varphi, t; h_1) + T_2(s_{\alpha\varphi}, \alpha, \varphi, t; h_2)] d\alpha, \quad s_{\alpha\varphi} = r(\varphi) \cos(\alpha - \varphi), \quad (27)$$

$$\text{где} \quad T_k(s, \alpha, \varphi, t; h_k) = \begin{cases} 0, & s + a_\omega t \leq r_{1\omega}, \\ b_{k\omega} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) h_k(s + a_\omega t, \alpha, \varphi) + \\ + \int_{r_{1\omega}}^{s+a_\omega t} v_{k\omega}(s - \sigma, t) h_k(\sigma, \alpha, \varphi) d\sigma, & s + a_\omega t > r_{1\omega}. \end{cases} \quad (28)$$

**4.3.** Ищется вектор-функция  $h \in \mathcal{H}$ , минимизирующая квадратичный функционал потерь

$$\mathcal{F}(h) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ T_1^2(s_{\alpha\varphi}, \alpha, \varphi, t; h_1) + T_2^2(s_{\alpha\varphi}, \alpha, \varphi, t; h_2) \right] d\alpha,$$

имеющий смысл, с точностью до постоянного множителя, квадрата внутренней энергии, внесенной управлением на границе пластинки за время  $t^*$ .

Замена  $(t, \alpha, \varphi) \rightarrow (s, \alpha, \varphi)$  по формуле  $s = s_{\alpha\varphi} + a_\omega t$  приводит функционал  $\mathcal{F}$  к виду

$$\mathcal{F}(h) = \frac{1}{2} \iiint_{\Pi_0} a_\omega^{-1} \left[ (\Gamma_1 h_1)^2 + (\Gamma_2 h_2)^2 \right] ds d\alpha d\varphi, \quad (29)$$

$$\Pi_0 = \left\{ (s, \alpha, \varphi) \in \Pi: s \leq r_{\alpha\varphi} = s_{\alpha\varphi} + a_\omega t^* \right\},$$

$$\Gamma_k h_k = b_{k\omega} \exp \left[ -\frac{s - s_{\alpha\varphi}}{2a_\omega \tau} \right] h_k(s, \alpha, \varphi) + \int_{r_{1\omega}}^s \delta_{k\omega} \left( s_{\alpha\varphi} - \sigma, \frac{s - s_{\alpha\varphi}}{a_\omega} \right) h_k(\sigma, \alpha, \varphi) d\sigma.$$

Аналогично одномерному случаю вводятся гильбертовы пространства  $X = L_2(\Pi_0 \rightarrow \mathbb{R}^2)$ ,  $Y = L_2(\Pi_0 \rightarrow \mathbb{R})$ . Рассматривается задача оптимального управления

$$\mathcal{F}(h) \rightarrow \min, \quad \Lambda h - \theta_\alpha(s - a_\omega t^*) = 0, \quad h \in X, \quad (30)$$

где  $\theta_\alpha$  – функция (23),  $\Lambda$  – оператор (25),  $\mathcal{F}$  – функционал (29). Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\varphi, \lambda) = \mathcal{L}(h) + \iiint_{\Pi_0} \lambda(s, \alpha, \varphi) [\Lambda h - \theta_\alpha] ds d\alpha d\varphi, \quad \lambda \in Y.$$

Имеют место аналоги утверждений 1°, 2° в п. 3.2. Применение теоремы 1.1 из главы 1 приводит решение задачи (30) к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода по  $s \in [r_{1\omega}, r_{\alpha\varphi}]$  на тройку  $[h_1, h_2, \lambda]$

$$M(s, \alpha, \varphi) \psi(s, \alpha, \varphi) + \int_{r_{1\omega}}^{r_{\alpha\varphi}} N(s, \sigma, \alpha, \varphi) \psi(\sigma, \alpha, \varphi) d\sigma = f(s, \alpha) \quad (31)$$

с гладкими  $M, N, f$ ,  $|\det M| \geq \text{const} > 0$  (см. § 3.4). Повторение рассуждений, проведенных в п. 3.2, дает: в общем положении

$$-1 \notin s(\mathcal{H}), \quad \mathcal{H}\psi = \int_{r_{1\omega}}^{r_{\alpha\varphi}} M^{-1} N \psi d\sigma, \quad (32)$$

система (31) имеет единственное решение  $\hat{\psi} = [\hat{h}_1, \hat{h}_2, \lambda]^\top \in C(\Pi_0)$ .

Из выполненных построений с учетом  $2\pi$ -периодичности  $M, N, r_{\alpha\varphi}$  по  $\varphi$  следует, что пара  $\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$  удовлетворяет требованиям (24), (26) с заменой  $\Pi$  на  $\Pi_0$ . Обозначим  $\mathcal{H}_0 = \{h \in \mathcal{H} : h = [\hat{h}_1, \hat{h}_2]^\top \text{ на } \Pi_0\}$ .

Построение векторов  $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}$  приводится, после вычисления  $(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ , к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода на продолжение в  $\Pi \setminus \Pi_0$  одной из компонент  $\hat{h}_k$  при фиксированном – с сохранением непрерывности и свойств (24) – продолжении другой.

**ТЕОРЕМА 3.3.** *В ситуации общего положения (32) каждая вектор-функция  $h = [h_1, h_2]^\top$  класса  $\mathcal{H}_0$ , где  $\hat{h}_1, \hat{h}_2$  – компоненты решения  $\hat{\psi}$  системы интегральных уравнений (31), дает решение задачи оптимального граничного управления (30). Соответствующий оптимальный температурный режим на границе пластинки вычисляется по формулам (27), (28), где  $\delta_{k\omega}$  – функции (21), строящиеся по элементам матрицы Римана  $V_\omega$  второго рода семейства одномерных гиперболических систем (19).*

**5.** В § 3.5 результаты §§ 3.1–3.4 распространены на случай трехмерного материала по схеме, изложенной в п. 4. Здесь

$$K = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}, \quad K = K^\top, \quad K > 0.$$

Система (1) в векторно-матричной записи имеет вид

$$\tilde{L}u = \left( \frac{\partial}{\partial t} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + B \right) u = 0, \quad (33)$$

$$u = [T, q]^\top, \quad q = [q_1, q_2, q_3]^\top,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & (c\rho)^{-1} & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (c\rho)^{-1} & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (c\rho)^{-1} \\ \tau^{-1}\kappa_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tau^{-1}\kappa_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau^{-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть  $\mathcal{D}$  – ограниченная область в пространстве  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , звездная относительно точки  $(0, 0, 0)$ , с кусочно-гладкой границей с уравнением в сферических координатах

$$|x| = r(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in E, \quad E = [0, 2\pi] \times [0, \pi]. \quad (34)$$

Рассматривается смешанная задача, моделирующая теплоперенос в теле  $\mathcal{D}$

$$\begin{cases} \tilde{L}u = 0, & (x, t) \in \mathcal{D} \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = [0, 0, 0, 0]^T, \quad T|_{|x|=r(\varphi)} = \mu(\varphi, t), \end{cases} \quad (35)$$

где  $\tilde{L}$  – оператор (33),  $\mu \in C(\partial\mathcal{D})$ , выполняется условие согласования  $\mu(\varphi, 0) = 0$ .

**5.1. Введем семейство ортов**

$$\Omega = \left\{ \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in E \right\}. \quad (36)$$

Построим семейство одномерных гиперболических систем

$$\tilde{L}_\omega u = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}(\omega) \frac{\partial}{\partial s} + B \right) u = 0, \quad \omega \in \Omega, \quad (37)$$

где  $\hat{A}(\omega) = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3$ ,  $A_k$ ,  $B$  – матрицы (33). Имеет место равенство  $\tilde{A}(\omega) = Z_\omega \text{diag}(a_\omega, 0, 0, -a_\omega) Z_\omega^{-1}$ ,

$$\text{где } Z_\omega = \begin{bmatrix} \frac{a_\omega}{\gamma} & 0 & 0 & \frac{a_\omega}{-\gamma} \\ f & g & -\gamma \end{bmatrix}, \quad Z_\omega^{-1} = \frac{b_\omega}{2a_\omega} \begin{bmatrix} \frac{b_\omega^{-1}}{\omega} & 0 & 0 & \frac{b_\omega^{-1}}{-\omega} \\ 2\xi & 2\eta \end{bmatrix}^T, \quad b_\omega = \frac{1}{a_\omega c \rho},$$

$$f = \begin{bmatrix} \sin \alpha_1 \\ -\cos \alpha_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \omega \times f, \quad \gamma = \frac{K\omega}{\tau}, \quad \xi = g \times \gamma, \quad \eta = \gamma \times f.$$

Вычисления по формулам § 1.3 дают следующий результат.

**ТЕОРЕМА 3.4.** Матрицы Римана первого и второго рода  $U_{k\omega}$ ,  $V_\omega$  семейства гиперболических систем (37) имеют вид



$$U_{1\omega}(t) = \frac{b_\omega \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{2\tau a_\omega} \left[ \begin{array}{c|c} \tau a_\omega b_\omega^{-1} & \tau a_\omega \omega^\top \\ \hline b_\omega^{-1} K \omega & K \omega \omega^\top \end{array} \right], \quad U_{2\omega}(t) = \frac{b_\omega \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{a_\omega} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & f \xi^\top & & \\ 0 & & & \end{array} \right],$$

$$U_{3\omega}(t) = \frac{b_\omega \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{a_\omega} \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & g \eta^\top & & \\ 0 & & & \end{array} \right],$$

$$U_{4\omega}(t) = \frac{b_\omega \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{2\tau a_\omega} \left[ \begin{array}{c|c} \tau a_\omega b_\omega^{-1} & -\tau a_\omega \omega^\top \\ \hline -b_\omega^{-1} K \omega & K \omega \omega^\top \end{array} \right],$$

$$V_\omega(s, t) = [v_{ik\omega}] = \begin{cases} Z_\omega \hat{V}_\omega Z_\omega^{-1}, & (s, t) \in Y_{1\omega}^+ \cup Y_{1\omega}^-, \\ 0, & (s, t) \in Y_{0\omega}^+ \cup Y_{0\omega}^-, \end{cases}$$

$$\hat{V}_\omega = \frac{\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}{4\tau a_\omega} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{d_\omega}{d_{1\omega}} I_1\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) & 0 & 0 & I_0\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_0\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) & 0 & 0 & \frac{d_\omega}{d_{2\omega}} I_1\left(\frac{d_\omega}{2\tau}\right) \end{array} \right],$$

где  $Y_{0\omega}^\pm$ ,  $Y_{1\omega}^\pm$  – углы, изображенные на рис. 1, с заменой характеристики  $\ell_{3\omega}$  на  $\ell_{4\omega}$ ;  $d_{k\omega}$ ,  $d_\omega$  – величины (20).

Из формулы для матрицы  $V_\omega$  следует, в частности, формулы (21) для элементов  $v_{11\omega}$ ,  $v_{12\omega}$ , здесь  $\omega$  – орт (36).

**5.2.** Задача граничного управления имеет вид (22) с заменой пластинки пространственным телом  $\mathcal{D}$ . Предполагается  $\theta(x) \in \dot{C}^\infty(\bar{\mathcal{D}})$ ,

$$t^* \geq \frac{2r_0}{a_m}, \quad a_m = \min_{\omega \in \Omega} a_\omega, \quad r_0 = \max_{\varphi \in E} r(\varphi).$$

Продолжая  $\theta$  нулем из  $\bar{\mathcal{D}}$  в  $\mathbb{R}^3$ , аналогично (23) получим

$$\theta(x) = \int_{E_0} \tilde{\theta}_\alpha(\omega \cdot x) d\alpha, \quad \tilde{\theta}_\alpha(s) = \frac{\sin \alpha_2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \left[ e^{irs} \hat{\theta}(r\omega) + e^{-irs} \hat{\theta}(-r\omega) \right] r^2 dr, \quad (38)$$

где  $E_0 = [0, \pi] \times [0, \pi]$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\hat{\theta}$  – преобразование Фурье  $\theta$ .

Обозначим

$$r_{1\omega} = a_\omega t^* - r_0, \quad r_{2\omega} = a_\omega t^* + r_0, \quad \tilde{\Pi} = \{(s, \alpha, \varphi) : (\alpha, \varphi) \in E_0 \times E, r_{1\omega} \leq s \leq r_{2\omega}\}.$$

Зафиксируем вектор-функцию

$$h = \begin{bmatrix} h_1(s, \alpha, \varphi) \\ h_2(s, \alpha, \varphi) \end{bmatrix} \in C[\tilde{\Pi}], \quad h|_{\varphi_1=0} = h|_{\varphi_1=2\pi}, \quad h|_{\varphi_2=0} = h|_{\varphi_2=\pi}. \quad (39)$$

Определим оператор  $\Lambda$  равенством (25), где  $\omega$  – орт (36),  $\delta_{k\omega}$  – функции (21). Будем называть векторы (39) управлениями.

Обозначим  $\tilde{\mathcal{H}}$  класс управлений  $h$ , удовлетворяющих требованию  $\Lambda h = \tilde{\theta}_\alpha(s - a_\omega t^*)$ ,  $(s, \alpha, \varphi) \in \tilde{\Pi}$ , где  $\tilde{\theta}_\alpha$  – функция (38).

**ТЕОРЕМА 3.5.** *Каждому вектору  $h \in \tilde{\mathcal{H}}$  отвечает решение  $\mu$  задачи граничного управления (22) для пространственного тела  $\mathcal{D}$ , вычисляемое по формуле*

$$\mu(\varphi, t; h) = \int_{E_0} [\tilde{T}_1(s_{\alpha\varphi}, \alpha, \varphi, t; h_1) + \tilde{T}_2(s_{\alpha\varphi}, \alpha, \varphi, t; h_2)] d\alpha, \quad s_{\alpha\varphi} = \omega \cdot r(\varphi) \omega_\varphi, \quad (40)$$

где  $\tilde{T}_k$  – функция (28) при  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $r(\varphi)$  – функция (34),  $\omega_\varphi$  – орт (36) с заменой  $\alpha$  на  $\varphi$ .

**5.3.** Решается задача оптимального управления

$$\tilde{\mathcal{F}}(h) \rightarrow \min, \quad h \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad (41)$$

где 
$$\tilde{\mathcal{F}}(h) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} dt \int_E d\varphi \int_{E_0} [\tilde{T}_1^2(s_{\alpha\varphi}, \alpha, \varphi, t; h_1) + \tilde{T}_2^2(s_{\alpha\varphi}, \alpha, \varphi, t; h_2)] d\alpha.$$

Замена  $s = s_{\alpha\varphi} + a_\omega t$  приводит  $\tilde{\mathcal{F}}$  к виду (29), где  $\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ ,  $\Pi \rightarrow \tilde{\Pi}$ ,  $\Pi_0 \rightarrow \tilde{\Pi}_0$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ .

Рассуждения, аналогичные проведенным в п. 4.3, приводят решение задачи (41) к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода вида (31) по  $s \in [r_{1\omega}, r_{\alpha\varphi}]$  на тройку  $[h_1, h_2, \lambda]$ , где  $\lambda$  – множитель Лагранжа (см. § 3.5). При условии (32) система имеет единственное решение

$$\hat{\psi} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2, \lambda) \in C(\tilde{\Pi}_0),$$

при этом  $h = [\hat{h}_1, \hat{h}_2]^\top \in \hat{\mathcal{H}}$ . Обозначим  $\hat{\mathcal{H}}_0 = \{h \in \hat{\mathcal{H}} : h = [\hat{h}_1, \hat{h}_2]^\top \text{ на } \tilde{\Pi}_0\}$ .

Вычисление класса  $\hat{\mathcal{H}}_0$  здесь также приводится к решению уравнения Вольтерра второго рода.

**ТЕОРЕМА 3.6.** В общем положении (29) каждая вектор-функция  $h = [h_1, h_2]^T \in \hat{\mathcal{H}}_0$  дает решение задачи оптимального граничного управления (41). Соответствующий оптимальный температурный режим на границе тела  $\mathcal{D}$  вычисляется по формуле (40).

## **ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК**

1. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление гиперболической системой уравнений теплопроводности / Н. Г. Чурашева, Р. К. Романовский // ДАН. – 2012. – Т. 446. – № 2. – С. 138–141.
2. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление теплопереносом в одномерном материале. Гиперболическая модель / Н. Г. Чурашева, Р. К. Романовский // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 9. – С. 1256–1264.
3. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление теплопереносом в изотропном теле / Н. Г. Чурашева, Р. К. Романовский // Доклады АН ВШ РФ. – 2012. – Т. 19. – № 2. – С. 54–60.
4. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление теплопереносом в двумерном анизотропном материале. Гиперболическая модель / Н. Г. Чурашева // Вестник Омского университета. – 2012. – № 2. – С. 63–66.

### **Публикации в других изданиях**

5. Чурашева, Н. Г. Матрицы Римана гиперболической системы уравнений теплопроводности. Случай анизотропного тела / Н. Г. Чурашева // Омский научный вестник. – 2009. – № 3. – С. 29–33.
6. Чурашева, Н. Г. Граничное управление теплопереносом в анизотропном двумерном материале. Гиперболическая модель / Н. Г. Чурашева // Омский научный вестник. – 2010. – № 3. – С. 14–18.
7. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление. Гиперболическая модель граничного управления теплопереносом в анизотропной пластике / Н. Г. Чурашева // Прикладная математика и фундаментальная информатика : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Зыкиной. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. – С. 46–50.

8. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление процессом распространения тепла в одномерном материале. Гиперболическая модель / Н. Г. Чурашева, Р. К. Романовский. – Деп. в ВИНТИ 28.02.11. № 96 В-2011.
9. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление гиперболической системой уравнений теплопроводности. Одномерный случай / Н. Г. Чурашева, Р. К. Романовский // Современные проблемы науки и техники : сб. науч. тр. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. – С. 108–112.
10. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление одномерной гиперболической системой уравнений теплопроводности / Н. Г. Чурашева, Р. К. Романовский // Прикладная математика и фундаментальная информатика : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Зыкиной. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. – С. 32–42.
11. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление теплопереносом в однородном стержне. Гиперболическая модель / Н. Г. Чурашева, Р. К. Романовский // Математика, ее приложения и математическое образование : Материалы IV Международ. конф. МПМО-2011. – Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2011. – С. 82–87.
12. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление теплопереносом. Гиперболическая модель / Р. К. Романовский, Н. Г. Чурашева // Аналитическая механика, устойчивость и управление : Труды X Международ. Четаевской конф. Секция 3. Управление. – Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – Т. 3. – Ч. 2. – С. 313–318.
13. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление переносом тепла в изотропном теле / Н. Г. Чурашева, Р. К. Романовский // Динамика систем, механизмов, машин : Материалы VII Международ. науч.-техн. конф. Книга III. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2012. – С. 107–111.
14. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление теплопереносом в анизотропной пластинке / Н. Г. Чурашева // Прикладная математика и фундаментальная информатика : сб. науч. тр. / под ред. А. В. Зыкиной. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2012. – С. 37–41.
15. Чурашева, Н. Г. Оптимальное граничное управление теплопереносом в анизотропном двумерном материале. Гиперболическая модель / Н. Г. Чурашева // Динамика систем, механизмов, машин : материалы VII Международ. науч.-техн. конф. Книга III. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2012. – С. 122–126.